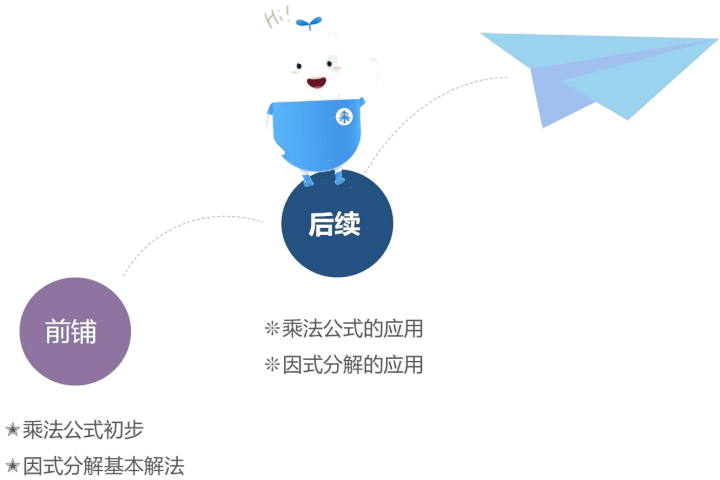
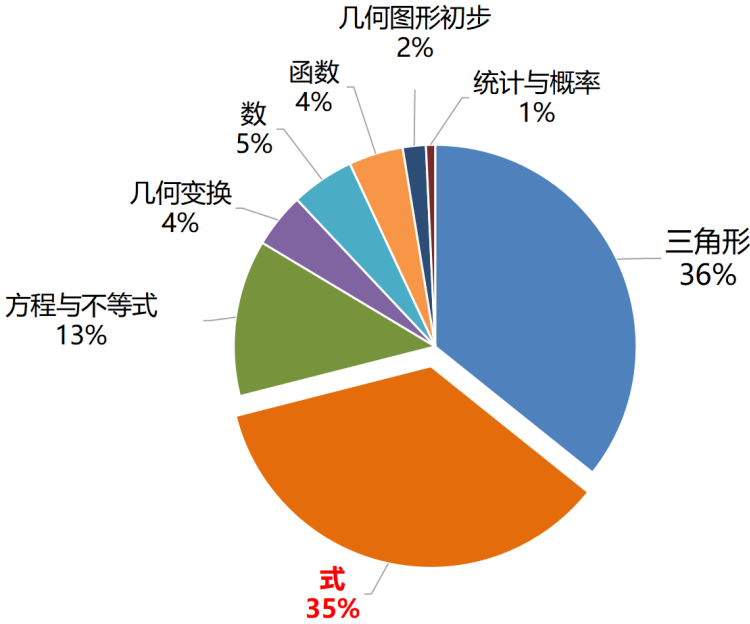


乘法公式的应用

知己知彼



一、配方法

完全平方公式

两数和: $(a+b)^2 =$ _____

两数差: $(a-b)^2 =$ _____

例题

1. 若 $x^2 + (m-3)x + 4$ 是一个完全平方式, 则 m 的值是 _____ .
2. 用配方法将二次三项式 $a^2 - 4a + 5$ 变形, 结果是 () .
A. $(a-2)^2 + 1$ B. $(a+2)^2 - 1$ C. $(a+2)^2 + 1$ D. $(a-2)^2 - 1$
3. 若 $a^2 + 2a + b^2 - 6b + 10 = 0$, 则 $a^2 - b^2 =$ _____ .
4. 如果 $a + 2b + 3c = 12$, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, 则 $a + b^2 + c^3 =$ _____ .

5. 若 $m^2 - 2mn + 2n^2 - 8n + 16 = 0$, 求 m 、 n 的值 .

解: $\because m^2 - 2mn + 2n^2 - 8n + 16 = 0$,

$\therefore (m^2 - 2mn + n^2) + (\text{_____}) = 0$,

即 $(\text{_____})^2 + (\text{_____})^2 = 0$. 根据非负数的性质,

$\therefore m = n =$ _____ .

阅读上述解答过程, 解答下面的问题,

设等腰三角形 ABC 的三边长 a 、 b 、 c , 且满足 $a^2 + b^2 - 4a - 6b + 13 = 0$, 求 $\triangle ABC$ 的周长 .

6. 阅读下面的材料并解答后面的问题：

小聪：你能求出 $x^2 + 4x - 3$ 的最小值吗？如果能，其最小值是多少？

小明：能，求解过程如下：

因为： $x^2 + 4x - 3 = x^2 + 4x + 4 - 4 - 3 = (x^2 + 4x + 4) - (4 + 3) = (x + 2)^2 - 7$.

而对任意 x 的取值，总有 $(x + 2)^2 \geq 0$ ，只有当 $x = -2$ 时， $(x + 2)^2$ 取得最小值为0，所以 $x^2 + 4x - 3$ 的最小值是 -7 .

(1) 根据小明的求解过程，你能否求出 $x^2 - 4x + 5$ 的最小值？如果能，请写出你的求解过程 .

(2) 请直接写出 $-x^2 - 4x + 3$ 的最大值是 _____ .

练习

7. 已知 $y^2 + my + 1$ 是完全平方式，则 m 的值是 () .

A. 2

B. ± 2

C. 1

D. ± 1

8. 如果 $x^2 + 8x + m = (x + n)^2$ ，则 $m + n =$ _____ .

9. 用配方法将代数式 $4x^2 - 4x + 2$ 变形，正确的是 () .

A. $(2x - 2)^2 - 2$

B. $(2x - 1)^2 + 2$

C. $(2x - 1)^2 + 1$

D. $(2x - 2)^2 + 1$

10. 已知 $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 52 = 0$ ，则 $(3x - 2y)^2 =$ () .

A. 1

B. 0

C. -1

D. 4

11. 若实数 a, b 满足 $a + b^2 = 1$ ，则 $a^2 + 2b^2$ 的最小值 _____ .

12. 若 $M = 2a^2 + 4ab + 5b^2 - 12bc + 37c^2 - 2ac + 11$ ，则 M 的最小值为 _____

13. 已知 a 、 b 、 c 为 $\triangle ABC$ 三边的长 .

(1) 求证 : $a^2 - b^2 + c^2 - 2ac < 0$.

(2) 当 $a^2 + 2b^2 + c^2 = 2b(a + c)$ 时 , 试判断 $\triangle ABC$ 的形状 .

14. 选取二次三项式 $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 中的两项 , 配成完全平方式的过程叫配方 . 例如

①选取二次项和一次项配方 : $x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$;

②选取二次项和常数项配方 : $x^2 - 4x + 2 = (x - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - 4)x$, 或
 $x^2 - 4x + 2 = (x + \sqrt{2})^2 - (4 + 2\sqrt{2})x$;

③选取一次项和常数项配方 : $x^2 - 4x + 2 = (\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 - x^2$.

根据上述材料 , 解决下面问题 :

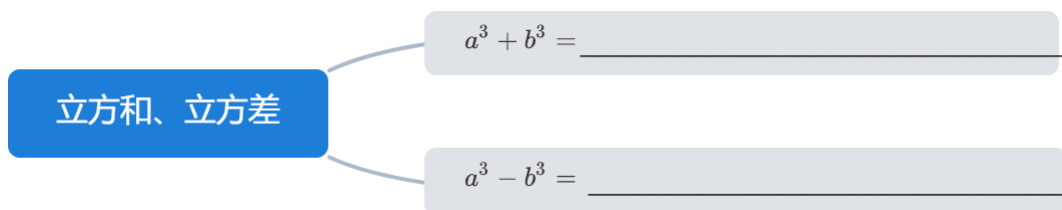
(1) 写出 $x^2 - 8x + 4$ 的两种不同形式的配方 .

(2) 已知 $x^2 + y^2 + xy - 3y + 3 = 0$, 求 x^y 的值 .

(3) 已知 a 、 b 、 c 为三条线段 , 且满足 $14(a^2 + b^2 + c^2) = (a + 2b + 3c)^2$, 试判断 a 、 b 、 c 能否围成三角形 , 并说明理由 .

二、复杂乘法公式

1. 立方和、立方差公式



|| 例题

15. 若 $x - y = 1$, $x^3 - y^3 = 2$, 则 $x^2 + xy + y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 利用立方和、立方差公式填空：

(1) $(b - \underline{\hspace{1cm}})(4a^2 + 2ab + b^2) = b^3 - 8a^3$

(2) $(x + 3y)(x^2 - \underline{\hspace{1cm}} + 9y^2) = x^3 + 27y^3$

(3) $(m + 2n)(\underline{\hspace{1cm}} - 2mn + \underline{\hspace{1cm}}) = m^3 + 8n^3$

(4) $(2m + n^2)(4m^2 - 2mn^2 + n^4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) $(x - 2y)^2 \cdot (x^2 + 2xy + 4y^2)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 若 $m - n = 3$, 求 $m^3 - n^3 - 9mn$ 的值 () .

A. 25

B. 27

C. 29

D. 31

18. 已知 $a + b = 5$, $a^2 + b^2 = 13$, 则 $ab = \underline{\hspace{1cm}}$, $a^3 + b^3 = \underline{\hspace{1cm}}$.

A. 6, 35

B. 6, 125

C. 12, 35

D. 12, 135

练习

19. 计算： $(2x-1)(4x^2+2x+1)$

20. 计算： $(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16) = \underline{\hspace{2cm}}$.

21. 若 $a+b=5$ ，求 a^3+b^3+15ab 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

22. 计算：

(1) $\left(a - \frac{1}{3}\right)\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{9}\right)\left(a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{1}{9}\right)$.

(2) $(b+3a)(9a^2-3ab+b^2)$.

(3) $(2a+b)^2[4a^2-(2a-b)b]^2$.

2. 完全立方公式

完全立方公式

完全立方和公式： $(a+b)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$

完全立方差公式： $(a-b)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$

例题

23. 计算： $\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^3 = (\quad)$.

A. $\frac{27}{8}x^3 + \frac{1}{8}y^3 + \frac{27}{8}x^2y + \frac{1}{8}xy^2$

C. $\frac{27}{8}x^3 + \frac{1}{8}y^3 + \frac{1}{8}x^2y + \frac{1}{8}xy^2$

B. $\frac{27}{8}x^3 + \frac{1}{8}y^3 + \frac{1}{8}x^2y + \frac{9}{8}xy^2$

D. $\frac{27}{8}x^3 + \frac{1}{8}y^3 + \frac{27}{8}x^2y + \frac{9}{8}xy^2$

24. 已知 $(x-1)^3 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, 则 $a+b+c+d$ 的值为() .

A. -1

B. 0

C. 1

D. 不确定

25. 计算 :

$$(a+2b)(a-2b)(a^4-8a^2b^2+16b^4) .$$

练习

26. 计算 : $(4a^2 - \frac{5}{2}b)^3 = ()$.

A. $64a^6 - 120a^4b + 75a^2b^2 - \frac{125}{8}b^3$

B. $56a^6 + 120a^4b + 75a^2b^2 + \frac{125}{8}b^3$

C. $56a^6 - 120a^4b - 75a^2b^2 + \frac{125}{8}b^3$

D. $64a^6 + 120a^4b - 75a^2b^2 - \frac{125}{8}b^3$

27. 已知实数 x, y 满足方程组 $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ x + y = 1 \end{cases}$ 则 $x^2 + y^2 =$ _____ .

28. 利用完全立方公式计算 :

(1) $(x+2)^3$.

(2) $(4a-5b)^3$.

(3) $\left(\frac{1}{2}x^2 - 4y\right)^3$.

(4) $(-3m^2 - 2n^2)^3$.

(5) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}\right)$.

 我学会了什么